『総合政策論叢』第5号（2003年3月）
島根県立大学 総合政策学会

〔研究ノート〕

華氏産業連関理論について

張　　忠　任

目　次

はじめに

世界的に著名な数学者華羅庚教授（Hua, Loo-Keng；1910～1985年）は、『計画経済に関するマクロ最適化数学理論』（The Mathematical Theory of Globally Optimal Planned Economic Systems）[1)]という遺著で、ユニークな産業連関理論を提出した。

華教授の産業連関理論（以下華氏産業連関理論）は1950年代後期に形成されたが、「文化大革命」（1966～1976年）の混乱の中で、関連する草稿や研究ノートはすべて紛失してしまった。1982年10月、心筋梗塞の発病後、彼は余命幾ばくもないことを覚悟し、最後の仕事としてその産業連関理論を必死に追憶し、永眠までの3年間で上記の遺著を完成させた。華教授は、この研究に最大の希望を託していたが、「これは、私が数学分野を越えた最後の試みであろう。これも、私の最大の失敗になるかもしれない」と懸念した。華氏産業連関理論は、戎衛東、劉樹林などにより研究を続けられている（戎　衛東ほか［1993］、劉　樹林・戎　衛東［1993］、戎　衛東・劉　樹林［1994］、劉　樹林［1994］参照）。

華教授は、毛沢東時代の数学者として、計画経済思想の影響を深く受けていたため、彼の逝去7年後の中国の市場経済体制への移行は、彼にとって想像できないことであっただ

ろう。したがって、彼の産業連関理論には、主観的作用（指導者の役割など）を強調する傾向が濃厚であるように思われる。ところが、その産業連関理論は、Leontiefと異なり、前後期関係に基づき、より一般的な数学的手法で展開したものであり、経済研究及び応用に大きな意義があると考えられる。

本稿は、華教授のユニークな産業連関理論を紹介して、現代経済学の視角から分析を行うものである。

1. 華氏産業連関理論の基本概念

(1)「産綜」と消耗係数行列

産出ベクトル $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は、「産綜」と呼ばれ、l 年目の「産綜」を $X^{(l)}$ で表すと、経済成長過程が次のように表示できる。

$$\mathbf{X}^{(0)} \to \mathbf{X}^{(1)} \to \cdots \to \mathbf{X}^{(l)} \to \cdots$$

各部門が同じ比率 ρ_l で伸びることは数式で表すと

$$\mathbf{X}^{(l)} = \rho_l \mathbf{X}^{(0)}$$

になるが、$\rho_l = \sigma^l$ とすれば、$\sigma - 1$ は均一年成長率となる。

初年度の産出ベクトルは $\mathbf{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ で、第 j 部門から第 i 部門へ配分した製品量[2] を $X_{ij}^{(0)}$ とすれば、

$$x_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots (1\text{-}1\text{-}1)$$

を得る[3]。

次に、

$$a_{ij}^{(0)} = x_{ij}^{(0)} / x_j^{(1)} \qquad \cdots\cdots (1\text{-}1\text{-}2)$$

とする。$a_{ij}^{(0)}$ は消耗係数と呼ばれる。式（1-1-2）を式（1-1-1）に代入すると、

$$x_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(0)} x_i^{(1)} \qquad \cdots\cdots (1\text{-}1\text{-}3)$$

を得る。式（1-1-3）を行列表記法で

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{A}$$

に書き直すことができる。ここで、$\mathbf{A} = (a_{ij}^{(0)})$ であり、消耗係数行列という。

(2)標準型行列と行列の「高標」

【定義 1.1】 どの行にもどの列にも正の成分は1つだけあり、それ以外はすべてゼロである正方行列を広義置換正方行列と呼ぶ。

すべての広義置換正方行列は1つの群（Group）となり、$\mathbf{GP}_n$ で表す。$\mathbf{GP}_n$ には2つの部分群が含まれる。1つは、正の対角正方行列 $\mathbf{D}_n$ からなる群である。

$$\mathbf{D}_n = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \qquad \lambda_i > 0 \ (0 \le i \le n)$$

もう一つは置換群 $\mathbf{P}_n$ であり、成分が0と1だけである。明らかに、$\mathbf{GP}_n$ の任意の要素は $\mathbf{DP}$ $(\mathbf{D} \in \mathbf{D}, \mathbf{P} \in \mathbf{P}_n)$ の形で唯一に表すことができる。

[定理 1.1] ある非負行列の逆行列も非負ならば、この非負行列は広義置換正方行列である。

（証明）非負行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ の逆行列 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 逆行列とすると、$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ となるため、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik}$$

を得る。したがって

$$a_{ij} = 0 \ (\forall i \neq k, \forall j)$$

となる。よって、$a_{ij} \neq 0$ の場合、$b_{jk} = 0 \ (\forall i \neq k)$ となる。

【定義 1.2】非負正方行列 A、B に対して、広義置換正方行列 Q が存在し、かつ $\mathbf{QAQ}^{-1} = \mathbf{B}$ が成立すれば、A と B は「相通」と呼ばれ、$\mathbf{A} \overset{\mathrm{GP}}{\sim} \mathbf{B}$ と記す。

【定義 1.3】$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(k)} & 0 \\ \mathbf{A}^{(n-k,k)} & \mathbf{C}^{(k)} \end{bmatrix}$ とし、$\mathbf{A} \overset{\mathrm{GP}}{\sim} \mathbf{B}$（すなわち A と B は群 $\mathbf{GP}_n$ の下で相通すること）が成立するならば、A を分解可能行列といい、ではなければ、A を分解不能行列と呼ぶ。

A が分解不能行列ならば、$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ 0 & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{P}}$ となる。よって

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}^{(k)} \\ \mathbf{I}^{(n-k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ 0 & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}^{(n-k)} \\ \mathbf{I}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}$$

が成立するため、分解不能行列の転置行列も分解不能行列であることが分かる。

【定義 1.4】$\mathbf{A} = (a_{ij})$ に対して、$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = g \ (0 \leq j \leq n)$ が成立するならば、A を標準型行列、g を「高標」と呼ぶ。

A を標準型行列、$\mathbf{e} = (1, 1, \cdots, 1)$ とし、$\mathbf{eA} = g\mathbf{A}$ が成立するため、g と $\mathbf{e}$ はそれぞれ A の固有値と固有ベクトルとなる。なお、$\frac{1}{g}\mathbf{A}$ の列和は 1 であり、マルコフ（Markov）行列という。

(3) Perron-Frobenius 定理の応用

［定理 1.2］（Perron-Frobenius 定理）群 $\mathbf{D}_n$ の下で、分解不能行列は標準型行列と相通する（証明　略）。

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ を分解不能行列として、［定理 1.2］の証明は、華教授により $\Lambda \mathbf{A} \Lambda^{-1}$ の列和 $g_i(\Lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が等しくなる行列 Λ を求めることに帰結された。ここで、$g_i(\Lambda)$ は $\Lambda \mathbf{A} \Lambda^{-1}$ の列和を表す。$\Lambda \mathbf{A} \Lambda^{-1} = (\lambda_i a_{ij} \lambda_j^{-1})_{n \cdot n}$ となるため、x_i で λ_i を代替すると

$$g_j(\Lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}}{x_j}$$

を得る。したがって、［定理 1.2］は

$$g = \min_{x>0} \max_{1 \le j \le n} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}}{x_j}$$

と等値することが分かる。

[定理 1.3] **A** の列固有ベクトルを $\mathbf{X}'$、$\mathbf{X}'$ に対応する固有値を β、**A** の行固有ベクトルを **y**、**y** に対応する固有値を γ とする。$\beta \neq \gamma$ の場合、$\mathbf{yx}' = 0$ となる。

(証明) $\mathbf{AX}' = \mathbf{X}'\beta$、$\mathbf{YA} = \gamma\mathbf{Y}$ から、

$$\gamma\mathbf{YX}' = \mathbf{YAX}' = \beta\mathbf{YX}'$$

を得る。したがって、$\beta \neq \gamma$ ならば、$\mathbf{YX}' = 0$ になる。

[定理 1.4] **A** を非負分解不能行列とする。**A** の「高標」g は **A** の固有値となり、また g は正の固有ベクトルをもつ。さらに、**A** の g 以外の固有値の絶対値は g を超えない(証明　略)。

[定理 1.5] 非負分解不能行列は唯一の正固有ベクトルをもつ。また、唯一の正固有ベクトルを持つ非負正方行列は非負分解不能行列であるに間違いない(証明　略)。

実に、[定理 1.5] から、正固有ベクトルの存在性の証明を与えられている。

[定理 1.6] 行置換と列置換を問わないならば、非負分解不能行列の標準型は唯一である(証明　略)。

[定理 1.7] **A** を非負分解不能行列、g を **A** の「高標」とする。**A** は g 以外絶対値が g と等しい固有値をもつ場合、**A** は群 $\mathbf{P}_n$ の下で次のような巡回行列(Cyclic Matrix)と相通する(証明　略)。

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{k-1,k} \\ \mathbf{A}_{k,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \quad (1\text{-}1\text{-}4)$$

【定義 1.5】 $\exists l$ (l は正整数)、$\mathbf{A}^l$ が分解可能になる場合、**A** を非原始的行列(Imprimitive Matrix)という。$\forall l$ (l は正整数)、$\mathbf{A}^l$ は分解不能であれば、**A** を原始的行列(Primitive Matrix)と呼ぶ。

[定理 1.8] **A** を原始的行列、g を **A** の「高標」とする。

$$\lim_{l \to \infty} \left(\frac{\mathrm{A}}{g}\right)^l = \mathrm{u}'\mathrm{v} \text{ かつ } \mathbf{u}'\mathbf{v} = 1$$

ここで、$\mathbf{u}'$ と **v** はそれぞれ、**A** の列固有ベクトル、行固有ベクトルである(証明　略)。

［定理 1.9］（Frobenius根の狭義単調性）**A** と **B** を分解不能の非負行列とする。$\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ であれば、$g(\mathbf{A}) \leq g(\mathbf{B})$ となる。ここで、$g(\mathbf{A})$ と $g(\mathbf{B})$ はそれぞれ **A** と**B** の最大の正固有値を表す（証明　略）。

［定理 1.9］の経済的意義は、任意の消耗係数が小さくなると、成長率の向上をもたらすことにある。

［定理 1.10］任意の原始的行列 **A** に対して、$\exists l$（l は正整数）、$\mathbf{A}^l > 0$ となる。

【定義 1.6】原始的行列 **A** の正列固有ベクトル、正行固有ベクトル、および「高標」は、**A** の「3特徴」と呼ばれる。

［定理 1.11］原始的行列 **A** と **B** は同じ「3特徴」をもつならば、

$$\lim_{l \to \infty}\left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right)^l = \lim_{l \to \infty}\left(\frac{\mathbf{B}}{g}\right)^l$$

となる。

2．基本定理と正固有ベクトル分析方法

(1)基本定理

［定理 2.1］（基本定理）　**A** を正則の原始的行列、**X** を正ベクトルをとする。**X** は **A** の固有ベクトルでなければ、$\exists l_0$（l_0 は正整数）、$l > l_0$ になると、$\mathbf{X}\mathbf{A}^{-l} = \mathbf{X}^{(l)}$ には負成分が出る。

（証明）g を **A** の「高標」、$\mathbf{u}'$ と **v** はそれぞれ、**A** の列固有ベクトル、行固有ベクトルとすると、［定理 1.8］により

$$\lim_{l \to \infty}\left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right)^l = \mathbf{u}'\mathbf{v} \text{ かつ } \mathbf{u}'\mathbf{v} = 1$$

および

$$\mathbf{A}\mathbf{u}' = g\mathbf{u}' \qquad \mathbf{v}\mathbf{A} = g\mathbf{v}$$

となる。

一般性を失わずに、**u** の成分和＝1、$g = 1$、$\mathbf{X}\mathbf{u}' = 1$ としてもよい。よって、$\mathbf{X}^{(l)}\mathbf{u}' = \mathbf{X}^{(l)}\mathbf{A}^{-l}\mathbf{u}' = \mathbf{X}\mathbf{u}' = 1$ を得る。

もし $\forall l$、$\mathbf{x}^{(l)} \geq 0$ ならば、$\mathbf{X}^{(l)}\mathbf{u}' = 1$ から、$\mathbf{X}^{(l)}$ は有界集合となることが分かる。Weierstrass-Bolzano 定理により、部分列 $\{l_i\}$ が存在し、

$$\lim_{i \to \infty} \mathbf{X}^{(l_i)} = \mathbf{X}^* \geq 0 \text{、かつ } \mathbf{X}^*\mathbf{u}' = 1$$

となる。よって、

$$\mathbf{X} = \lim_{i \to \infty} \mathbf{X}\mathbf{A}^{-l_i} \cdot \mathbf{A}^{l_i} = \mathbf{X}^*\mathbf{u}'\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

を得る。この結果は、**X** は **A** の正固有ベクトルであることを意味する。以上[4]。

基本定理の経済的意義は、産業構造は消耗係数行列 **A** の正固有ベクトル **u** の構成に一致しなければ、若干年を経て国民生産がバランスを失って崩壊され、経済危機になること

にある。

さて、$\mathbf{A}$ は分解不能の非原始的行列であれば、［定理1.7］により、$\mathbf{A}$ を式（1-1-4）のような行列としてよい。$\mathbf{A}$ は正則であるため、$rank(\mathbf{A}) = n$ となる。$n = rk$ として、

$$\mathbf{A}^k = diag(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_k)$$

となる。$\mathbf{A}$ の正固有ベクトル $\mathbf{u}$ を $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$ にすると、明らかに $\mathbf{u}_i\mathbf{B}_i = g^k\mathbf{u}_i$ $(1 \leq i \leq k)$ が成立する。$\mathbf{X} = (\alpha_1\mathbf{u}_1, \alpha_2\mathbf{u}_2, \cdots, \alpha_k\mathbf{u}_k)$ $(\alpha_i > 0, 1 \leq i \leq k)$ にして、$\forall l$、$\mathbf{XA}^{-lk}$ は正ベクトルであることが分かる。しかし、$\mathbf{X}$ は必ずしも $\mathbf{u}$ の定数倍にならない。故に、$\mathbf{A}$ が分解不能の非原始的行列である場合、基本定理は成立しない。

$\mathbf{A}$ が非負分解可能行列である場合、$\alpha > 0, \beta > 0, \mathbf{X} = (x, 1)$、また $\mathbf{A}$ を

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha/\beta & 1/\beta \end{bmatrix}$$

とすれば、

$$\mathbf{XA}^{-l} = (x, 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-\alpha(1-\beta^l)}{1-\beta} & \beta^l \end{bmatrix} = \left(x - \frac{-\alpha}{1-\beta}, 0\right) + \beta^l\left(\frac{\alpha}{1-\beta}, 1\right)$$

を得る。$\beta > 1$ ならば、$\forall \mathbf{X}$、l が十分に大きくなると、$\mathbf{X}$ の1番目の成分がマイナスになる。$\beta < 1$ の場合、$x > \dfrac{\alpha}{1-\beta}$ ならば、$\forall l$、$\mathbf{XA}^{-l} > 0$ となる。

(2)正固有ベクトル分析方法の経済的意義とその検証

$\mathbf{A}$ を分解不能行列、g を $\mathbf{A}$ の最大の正固有値、$\mathbf{u}'$ と $\mathbf{v}$ をそれぞれ、g に対応する列固有ベクトルと行固有ベクトルとする。

基本定理により、$\mathbf{X}^{(0)}$ は g に対応する列固有ベクトルであれば[5]、$\mathbf{X}^{(l)} = g^{-l}\mathbf{X}^{(0)}$ が成立する。つまり、産業構造が消耗係数行列 $\mathbf{A}$ の $\mathbf{u}$ の構成に一致する場合、各部門の生産は一様に $\left(\dfrac{1}{g} - 1\right)$ の年平均成長率で伸びる。また、$\left(\dfrac{1}{g} - 1\right)$ は最大の成長率となり、すなわち成長率は $\left(\dfrac{1}{g} - 1\right)$ を超えることが不可能である。逆に、産業構造は $\mathbf{u}$ の構成に一致しなければ、若干年を経て国民生産がアンバランスになり崩壊される。

華教授は数値例を通じて基本定理を検証した。彼は2部門（農業と製造業）の数値例を採り上げた。消耗係数行列 $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.14 \\ 0.40 & 0.12 \end{bmatrix}$$

とされた。$\mathbf{A}$ の最大の正固有値 $g = 0.4304$ であり、$\dfrac{1}{g} = 2.3234$、成長率 $\dfrac{1}{g} - 1 \cong 132.34\%$ となる[6]。$g \cong 0.4304$ に対応する正固有ベクトルは、$\mathbf{u} \cong (44.34398, 20)$ となる。初期年の「産綜」（産出ベクトル）を $\mathbf{X}^{(0)} = (45, 20)$ にしてみると、表1のとおり、3年目に国民経済が崩壊する。

表１　国民経済が３年目に崩壊した数値例

	農　　業	製 造 業	生産の増大率（$1/g$）	
			農　　業	製 造 業
初 期 年	45.0	20.0		
第　1　年	100.0	50.0	2.20	2.50
第　2　年	307.7	57.7	3.08	1.15
第　3　年	−532.5	1,102.1	国民経済崩壊	

次に、初期年の「産綜」を $\mathbf{u}$ に近くなる $\mathbf{X}^{(0)} = (44.344, 20)$ にしてみると、表２のとおり、８年目に国民経済が崩壊する。

表２　国民経済が８年目に崩壊した数値例

	農　　業	製 造 業	生産の増大率（$1/g$）	
			農　　業	製 造 業
初 期 年	44.344	20.00		
第　1　年	103.02	46.47	2.323	2.323
第　2　年	239.37	107.95	2.323	2.323
第　3　年	556.11	250.86	2.323	2.323
第　4　年	1,292.80	582.24	2.324	2.320
第　5　年	2,990.60	1,362.90	2.313	2.340
第　6　年	7,165.50	2,998.20	2.395	2.199
第　7　年	13,054.00	9,754.70	1.821	3.253
第　8　年	89,821.00	-23,501.00	国民経済崩壊	

ともあれ、$\mathbf{X}^{(0)}$ は $\mathbf{u}$ に近ければ近いほど、国民生産の持続時間が永くなる。

ところが、表２のデータは表１と比べると、農業では、0.656 単位の農産物が使われなかった。0.656 単位の農産物をどうすればいいのか。華教授はその処分を反対して、次のとおり輸入出を通じて解決する方法を提出した。

農業の製造業の構成比は、44.34398 : 20 ≅ 2.2172 : 1 となる。必要な農産品輸出額を α、製造業産品輸入額を β とすれば、

$$(45-\alpha) : (20+\beta) = 2.2172 : 1$$

を得る。農産品と製造業産品の国際市場価格をそれぞれ q_1、q_2 とすると、国際収支のバランスを守るため、

$$q_1\alpha = q_2\beta$$

にさせる必要がある。この連立方程式から、α と β の解を求める。

価格ベクトルを $\mathbf{q}' = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ とすると、$\exists\lambda$

$$\lambda\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{g}$$

となる。ここで $\mathbf{g}' = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ は $\mathbf{A}$ の右側の正固有ベクトルである。したがって、価格の構成比は唯一に決定されることが分かる。

3．華氏産業連関理論の展開

(1)消費財部門の導入と華氏産業連関表の様式

前述した1，2項は、生産財だけに関する研究であった。ここでまずζを用いて、政府支出、教育文化経費、輸出、および着工から完成まで1年以上を要する基本建設費用など（輸入、固定資本の減価償却などを控除する）の総額とする。ζは「開銷産綜」（費用ベクトル）あるいは「消費産綜」と呼ばれる。このようにして、以下のモデルを得る。

$$\mathbf{X}^{(l)}-\zeta^{(l)}=\mathbf{X}^{(l+1)}\mathbf{A} \quad (l=1,2,\cdots,n) \qquad \cdots\cdots (3\text{-}3\text{-}1)$$

基本式（3.3.1）をもつモデルでは、原材料は「生産された期には使用されず、原料在庫として次期に持ち越され、次期になって初めて使用し尽くされる」ことになるから、中間財ではなくて在庫投資という最終財の扱いになる。$\mathbf{X}^{(l)}$をl期の産出量ベクトルとしてではなく、最終需要$\zeta^{(l)}$を生産するのに直接（ζ）かつ間接（$\mathbf{XA}$）に必要となる合計としての$\mathbf{X}$を$\mathbf{A}$の固有ベクトルとして計算するプロセスのl段階における中途計算結果にすぎないとすれば、式（3.3.1）はLeontiefと同一になるであろう。

表3　華氏産業連関表の様式

部門の番号		1	2	…	i	…	n	行列と計算手順
生産能力の上限		η_1	η_2	…	η_i	…	η_n	η
投入産綜	内部産綜	a_1	a_2	…	a_i	…	a_n	$\mathbf{a}$
	外部産綜	b_1	b_2	…	b_i	…	b_n	$\mathbf{b}$
	…	…	…	…	…	…	…	…
投入総産綜		x'_1	x'_2	…	x'_i	…	x'_n	$\mathbf{X}'$
消耗係数行列	1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1i}	…	a_{1n}	$\mathbf{A}$
	2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2i}	…	a_{2n}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	j	a_{j1}	a_{j2}	…	a_{ji}	…	a_{jn}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{ni}	…	a_{nn}	
消費産綜	行政支出	c_1	c_2	…	c_i	…	c_n	$\mathbf{c}$
	国防支出	d_1	d_2	…	d_i	…	d_n	$\mathbf{d}$
	輸　出	e_1	e_2	…	e_i	…	e_n	$\mathbf{e}$
	…	…	…	…	…	…	…	…
消費総産綜		z_1	z_2	…	z_i	…	z_n	$\mathbf{z}=\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}+\cdots$
基本建設産綜		f_1	f_2	…	f_i	…	f_n	$\mathbf{f}$
純余剰産綜		x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	$\mathbf{X}=\mathbf{X}'-\mathbf{z}-\mathbf{f}$
産出産綜		Y_1	Y_2	…	Y_i	…	Y_n	$\mathbf{Y}=\mathbf{XA}^{-1}$

$\mathbf{X}$を$\mathbf{A}$の正固有ベクトルに接近させるために、彼は、ζをどう決定するかの方法について検討した。ζは政策により決定されるものであるが[7]、ζは結局増加量（$\mathbf{X}^{(l+1)}-\mathbf{X}^{(l)}$）で賄うものであるので、（$\mathbf{X}^{(l+1)}-\mathbf{X}^{(l)}$）の使用率$\alpha$（$0<\alpha<1$）を決めることになる。

$\zeta^{(l)} = \alpha(\mathbf{X}^{(l+1)} - \mathbf{X}^{(l)})$ として、式（3-3-1）に代入すると、

$$(1+\alpha)\mathbf{X}^{(l)} = \mathbf{X}^{(l+1)}(\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I}) \quad \cdots\cdots (3\text{-}3\text{-}2)$$

を得る。$\hat{\mathbf{A}} = \dfrac{1}{1+\alpha}(\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I})$ とすると、式（3-3-2）を

$$\mathbf{X}^{(l)} = \mathbf{X}^{(l+1)}\hat{\mathbf{A}} \quad \cdots\cdots (3\text{-}3\text{-}3)$$

に書き直すことができる。問題は $\hat{\mathbf{A}}$ の正固有ベクトルを求めることになり、基本定理の適用ができるように見られる。

華教授には、中間財と最終需要の区分がなかったが、$\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ となるため、彼の消費産綜 ζ は事実上最終需要となる[8]。

(2)部門の衰退と拡張

現実では、一部の部門は衰退したり、一部の部門は拡張したりすることが可能である。この問題を解決するため、華教授はそのモデルを以下のように一般化した。

$$\frac{y_i^{(1)}}{y_i^{(0)}} = \lambda_i\rho \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad \cdots\cdots (3\text{-}3\text{-}4)$$

とする。ここで、$\rho > 0, \lambda_i > 0$（$i = 1, 2, \cdots, n$）である[9]。また、線形の条件により

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n} = 1$$

としてよい。$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ とすると、式（3-3-4）を

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \rho\mathbf{Y}^{(0)}\Lambda \quad \cdots\cdots (3\text{-}3\text{-}5)$$

に書き直すことができる。$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)}\mathbf{A}^{-1}$ であることにより、

$$\mathbf{Y}^{(0)} = \rho\mathbf{Y}^{(0)}\Lambda\mathbf{A} \quad \cdots\cdots (3\text{-}3\text{-}6)$$

を得る。

式（3-3-6）は、$\mathbf{Y}^{(0)}$ が $\Lambda\mathbf{A}$ の固有ベクトルであることを意味する。対応する固有値は $1/\rho$ である。

こうしてみれば、彼の新しいモデルは消耗係数行列 $\mathbf{A}$ を $\Lambda\mathbf{A}$ に広げたにすぎない。

(3)最適化とコントロール

各部門の生産能力を $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ とし、$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ で産品の価格ベクトルを表す。現有生産能力 η を前提として総産出 $\mathbf{X}\mathbf{g}'$ が最大になる産綜 $\mathbf{X}$ は以下のモデルにより決定される。

$$\left.\begin{array}{l} \max \mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}' \\ 0 \le \mathbf{X} \le \mathbf{X}^{(0)} \\ 0 \le \mathbf{X}\mathbf{A}^{-1} \le \eta \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (3\text{-}3\text{-}7)$$

基本定理により、$\mathbf{X}$ は消耗係数行列 $\mathbf{A}$ の正固有ベクトルではないと、若干年を経て国民生産がバランスを失って崩壊され、経済危機になる。また、$\mathbf{X}$ は $\mathbf{A}$ の正固有ベクトルに近ければ近いほど国民経済崩壊までの年限が永くなる。いうまでもなく、なるべく $\mathbf{A}$

の正固有ベクトルに近い $\mathbf{X}$ を選択できることが望ましい。このため、華教授は $\mathbf{X}$ と $\mathbf{A}$ の正固有ベクトル $\mathbf{u}$ との距離の測定法を検討した。

$\mathbf{X}$ と $\alpha\mathbf{u}$ との距離の平方は、$(\mathbf{X}-\alpha\mathbf{u})(\mathbf{X}-\alpha\mathbf{u})'$ である[10)]。それを展開して

$$\begin{aligned}&\mathbf{XX}'-2\alpha\mathbf{uX}'+\alpha^2\mathbf{uu}'\\&\quad=\mathbf{uu}'(\alpha-\mathbf{uX}'/\mathbf{uu}')^2+\mathbf{XX}'-(\mathbf{uX}')^2/\mathbf{uu}'\\&\quad\geq \mathbf{XX}'-(\mathbf{uX}')^2/\mathbf{uu}'\end{aligned}$$

が成り立つため、$\alpha=\mathbf{uX}'/\mathbf{uu}'$ にする場合に限り、$\mathbf{X}$ と $\mathbf{u}$ との距離が最小になることが分かる。$\alpha=\mathbf{uX}'/\mathbf{uu}'$ にした場合、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{u}$ との距離は $\varepsilon(\mathbf{X})=\mathbf{XX}'-(\mathbf{uX}')^2/\mathbf{uu}'$ になるが、α の大きさと関係がない。$\varepsilon(\mathbf{X})$ を用いて $\mathbf{x}$ を評価することができる。

むすびにかえて

産業連関理論はLeontiefにより構築されたものであるが、それに類似した経済理論や経済数学手法がいくつかある。華氏産業連関理論はその中の一つである。華氏産業連関理論の特徴を挙げると、およそ以下のとおりである。

(1)華教授は前後期関係に基づきLeontiefと異なる産業連関理論を提示した。また、彼の数学的分析手法には一般性があり、前後期関係を別にすると、Leontiefの産業連関理論に適用可能な数学的結論がいくつかある。例えば、次に述べる基本定理や産出ベクトルの評価基準などである。

(2)彼は「正固有ベクトル分析方法」を提示し、基本定理を通して、産業構造が消耗係数行列の正固有ベクトルの構成に一致しなければ、何年か後に国民生産がバランスを失って経済危機に陥ると結論づけている。

(3)一部の部門が衰退し、他の部門が拡張する（部門間のシェアが変わる）ような状態をモデルに組み入れた。

(4)現有生産能力を考慮し、産出ベクトルと消耗係数行列の正固有ベクトルとの距離の測定法を検討して、産出ベクトルの評価基準を提示した。

なお、華教授の遺著は未完成であり、賃金や利潤などはまだ考慮されていない。ところが、彼は産業連関方法に関して、数学ではより一般的な結論を引き出した。彼の数学的分析手法が広く経済研究分野に利用できる可能性が残っていると考えられる。この点は今後の研究課題とする。

本稿の作成に当たって、広島修道大学経済科学部藤本利躬教授にいろいろご指導いただいた。ここに深甚なる感謝の意を表したい。

付録　華羅庚教授略歴

華羅庚教授は数学者として世界的に著名である。

彼は、1910年11月12日中国江蘇省金壇県に生まれ、1924年に地元の初級中学校（日本の中学に相当）を卒業し、上海中華職業学校に進学したが、1年後家庭貧困のため退学して、父の小さな雑貨店で見習い工をしていた。しかし、数学に強い興味をもつ彼は、独学で数学研究に取り組んだ。5年後の1930年に、彼は上海の科学雑誌『科学』に「蘇家駒の代数5次方程式解法が成り立たない理由」を発表した。この論文が当時清華大学数学部長熊　慶来教授の注目を引き、清華大学に呼ばれ、翌年助手に、その翌年講師に、学歴を無視して抜擢された。1934年に文化基金会（義和団事件の賠償金の一部を当てて設立された）の研究員となった。1936～1938年、英国ケンブリッジ大学のVisitorとして滞在し、その間、数論方面の研究に大きな成果を上げた。1938年帰国し、当時昆明にあった西南連合大学の教授となった。

1941年には、ウェアリング問題とゴルドバッハ問題およびそれに関連ある問題に触れ、彼自身の改革と研究結果をも加えた「堆塁素数論」の原稿を完成させた。しかし、当時昆明の状況では出版できなかった。1946年3月、ソ連の科学アカデミーの招待により、彼はソ連を訪れた。訂正を加えた『堆塁素数論』は、ロシア語に翻訳され、1947年にはまずソ連で出版された。のちにハンガリー語、ドイツ語、英語などにも翻訳された。なお、その中国語版は中華人民共和国建国後の1953年であった。

1946年に米国のプリンストン高級研究所に招かれ、48年にはイリノイ大学の教授となった。49年10月に新中国が成立すると50年には帰国した。清華大学教授、中国科学院数学研究所長、中国数学会理事長、中国科学技術大学数学部長、同大学副学長、中国科学院応用数学研究所長、中国科学院副院長、中国科学院首席団などを歴任した。そして、米国科学院Foreign Academician、第3世界科学院Academician、ドイツのバファリア科学院Academicianとなっており、フランスのナンシ大学、米国イリノイ大学および香港中文大学により名誉博士号を授与された。

社会活動については、彼は中国全国人民代表大会常務委員（第1～6回）、第6回全国政治協商会議副主席、および中国民主同盟副主席であった。

彼は、10冊の著書（『堆塁素数論』、『多複素数関数論における典型的域に関する調和分析』、『数論の近似分析への応用』、『数論導引』など）を出版し、約200本の論文を発表した。彼の研究成果は、国際数学界に高く評価され、「華氏定理」、「ブロヴェルージャダン－華定理」、「華－王（王元）方法」などと命名された。

華教授は心臓病突発のため日本で客死した。彼は1985年6月に日本アジア交流協会の招待により初めて来日した。6月12日に東大数学教室で午後4時15分から行われた「中

華人民共和国における数学方法の普及に関する若干の個人的体験」と題する講演が終わったところ、「Thank You」の声がまだ余韻としてあたりに残るのに、彼は突然倒れた。当夜10時頃永眠した。享年74歳であった。

注

1）本書の中国書名は『計画経済大範囲最優化数学理論』である。

2）すなわち、生産 X_i に対して、原材料として、第 j 製品を X_{ij} だけ投入することである。華氏は、計画経済の立場に立って、すべての製品は計画部門により配分されるとしたため、「配分」の言葉を使ったのである。

3）華モデルの $\mathbf{A}=(a_{ij}^{(0)})$ の定義では、Leontief の場合とは逆に列成分が同一物量単位で計られている。彼は X_i 財の単位を p_i で表したが、分析には使われることがほぼない。

4）彼は、基本定理を Brouwer の定理を用いても証明できるが、結論が少なくなると指摘した。Brouwer の定理に対して、特に基本定理は、Limiting Cycle が存在する可能性を排除した。彼は以下のように述べた。

The mapping $\mathbf{y}=\dfrac{\mathbf{XA}}{\sigma(\mathbf{XA})}$, where $\sigma(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{n}x_i$, maps the compact simplex

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\leq 1 \qquad x_i\geq 0$$

into itself. If we use Brouwer's fixed point theorem, we can deduce only the existence of a fixed point, because Brouwer's theorem applies under very general conditions. In our case, the fixed point of our mapping is unique and interior to the simplex. Furthermore, no liming cycle can exist. This is topological meaning of our theorem. By Hua, Loo-Keng [1984].

5）$\mathbf{X}^{(0)}=\delta\mathbf{u}'$ を意味する。

6）こんなに大きな成長率は現実では不可能であろう。華教授が現実不可能な成長率を例にしたのは、1958年の「大躍進」の影響を受けたことによるのであろう。あるいは、この数値例は「大躍進」時期に作られたのであろう。本稿では、数値例をそのまま引用した。

7）華教授も、ζ が実務者により把握されるべきではなく、指導者により決定されるべきであると指摘した。この点においても、彼は高度に集権的計画経済思想の影響を深く受け取ったことが見られる。

8）華教授のモデルを、Leontief の表記法で書き直すと、$\mathbf{X}^{(0)}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y}^{(1)}$ となるだろう。

9）λ_i は第 i 部門の変動率であり、$\lambda_i>1$ ならば拡張、$0<\lambda_i<1$ ならば衰退を意味する。

10）$(\mathbf{X}-\alpha\mathbf{u})(\mathbf{X}-\alpha\mathbf{u})'$ は、$\mathbf{X}$ と $\alpha\mathbf{u}$ との内積である。

参考文献

Hua, Loo-Keng（華 羅庚）1984 "The Mathematical Theory of Globally Optimal Planned Economic Systems." *Proceedings of the National Academy of Sciences*, USA, Vol.81, No.20, Oct. 6549-6653.

華 羅庚 1984『高等数学引論余篇』、第9章、科学出版社。

華 羅庚・王 元 1984「有限と無限、離散と連続」『華羅庚科学普及著作選集』上海出版社。

華 羅庚 1987『計画経済に関するマクロ最適化数学理論』中国財政経済出版社。

白鳥冨美子 1985「華羅庚先生が来日の予定」『数学セミナー』7月号。

白鳥冨美子 1985「悲歌：華羅庚先生を憶う」『数学セミナー』8月号 58-59。

陳 丕顕 1985（当時中国共産党中央委員会書記処書記・全国人民代表大会常務委員会副委員長）「華羅庚同志の遺骨安置儀式における悼辞」『人民日報』6月22日。

戎 衛東・劉 樹林 1994「非負原始的行列の Perron 根と Perron ベクトルの計算方法」『内モンゴル大学学報』Vol. 25, No.4。

戎 衛東・楊 大力・戴 力群・劉 樹林 1993「マクロ経済分析の新道具：正固有ベクトル法」『中国管理科学』Vol. 1, No.1。
劉 樹林・戎 衛東 1993「華氏マクロ経済モデルの理論に関する再検討」『中国管理科学』Vol. 1, No.3。
劉 樹林 1994「新しい華氏マクロ経済モデル」『経済数学』 11号

キーワード：前後期関係　正固有ベクトル分析方法　最適化　コントロール　基本定理

(ZHANG Zhongren)